TD4

SÉRIES, VARIABLES DISCRÈTES.

Exercice 1 **EDHEC** 1997 Exercice 2.

Soit p un entier naturel fixé. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$$

1. Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$, la série de terme général u_n diverge.

On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

2. **a.** Montrer que, pour tout n,

$$(n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}.$$

b. En déduire par récurrence sur n que $S_n = \frac{1}{p-1}\left(1-(n+p+1)u_{n+1}\right)$.

3. **a.** On pose $v_n = (n+p)u_n$ Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.

c. Utiliser le résultat précédent pour montrer que la série de terme général u_n converge et donner sa somme en fonction de p et de ℓ.

4. On veut montrer que ℓ est nulle et on raisonne par l'absurde : on suppose donc que $l \neq 0$.

a. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$.

b. En déduire une contradiction avec la troisième question.

5. Donner la valeur de ℓ et en déduire en fonction de p, la somme de la série de terme général u_n.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul. Une entreprise dispose d'un lot du n feuilles originales qu'elle a numérotées $1, 2, \cdots, n$. Elle photocopie ces n feuilles originales et souhaite que chaque original soit agrafé avec sa copie. L'entreprise programme le photocopieur afin que chaque original soit agrafé avec sa copie. Cependant suite à un défaut informatique, la photocopieuse a mélangé les originaux et les copies. L'entreprise décide donc de placer les n originaux et les n copies dans une boite. Une personne est alors chargée du travail suivant : elle pioche simultanément et au hasard 2 feuilles dans la boite. S'il s'agit d'un original et de sa copie, elle les agrafe et les sort de la boite. Sinon, elle repose les deux feuilles dans la boite et elle recommence.

On modélise l'expérience par un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Soit T_n la variable aléatoire égale au nombre de pioches qui sont nécessaires pour vider la boite lorsque celle-ci contient n originaux et n copies (soit $2n$ feuilles).

On considère l'événement A_n : « À l'issue de la première pioche, les deux feuilles piochées ne sont pas agrafées » et a_n sa probabilité c'est-à-dire que $a_n = \mathbb{P}(A_n)$.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

1. Calculer a_n.
2. **Étude de T_2.** On suppose dans cette question que $n = 2$, c'est-à-dire que la boite contient deux originaux et deux copies.
   - **a.** Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$: $\mathbb{P}(T_2 = k) = (1 - a_2)(a_2)^{k-2}$.
   - **b.** Justifier que la variable $S_2 = T_2 - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de T_2 en fonction de a_2.
3. **Étude de T_3.** On suppose dans cette question que $n = 3$, c'est-à-dire que la boite, contient trois originaux et trois copies.
   - **a.** Calculer $\mathbb{P}(T_3 = 2)$ puis $\mathbb{P}(T_3 = 3)$ en fonction de a_2 et a_3
   - **b.** À l'aide du système complet d'événements $\left(A_3, \overline{A_3}\right)$ démontrer pour tout $k \geqslant 2$ que :
   $$\mathbb{P}(T_3 = k + 1) = (1 - a_3)\mathbb{P}(T_2 = k) + a_3\mathbb{P}(T_3 = k)$$
   - **c.** Montrer que pour tout $k \geqslant 2$,
   $$\mathbb{P}(T_3 = k) = \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right]$$
   - **d.** Calculer $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(T_3 = k)$.
   - **e.** Prouver que la variable aléatoire $T_3 - 1$ admet une espérance et calculer $E(T_3 - 1)$. Donner la valeur de $E(T_3)$ en fonction de a_2 et a_3.
   - **f.** Établir que la variable aléatoire $T_3(T_3 - 1)$ admet une espérance et donner sa valeur en fonction de a_2 et a_3.
   En déduire que T_3 admet une variance.

Exercice 3 **ECRICOME** 2018 Exercice 2.

Partie I : Étude de deux suites. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x + 1)$.
   - **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   - **b.** Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.
   - **c.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = f(n)$.
   - **d.** En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   - **e.** Écrire une fonction d'en-tête : `def suite_u(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.
2.
   - **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
   - **b.** Montrer que pour tout réel x positif :
   $$\ln(1 + x) \leqslant x$$
   En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   - **c.** Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1 + x)$ en 0 [1]. En déduire que :
   $$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

1. Demandez-moi, on fera ça dans quelques semaines

d. Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

e. Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers γ.

3. **a.** Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$$

puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n - \gamma| \leqslant \frac{1}{n}$$

c. On rappelle que l'instruction np.floor (x) renvoie la partie entière d'un réel x (à condition bien sûr d'avoir appelé la bibliothèque numpy avec son alias habituel et on suppose que la fonction suite_u de la question **1.e** a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
import numpy as np

eps=input('Entrer un reel strictement positif')
n=floor(1/eps)+1
print(suite_u(n))
```

Partie II : Étude d'une série. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

4. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

5. **a.** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$$

b. Déterminer deux réels α et β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$$

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

6. **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

b. Calculer alors $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

7. **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

b. Retrouver alors le résultat de la question **3.b**.

EXERCICE 4 EDHEC 2005 Problème.

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0<p<1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0=0$.

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N} X_n$ est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0,0,1,2,0,0,1$, alors on a $T=1$. Si les abscisses successives sont : $1,2,3,0,0,1$, alors on a $T=4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

1. **a.** Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T=k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.

   b. Donner la loi de X_1.

   c. En déduire $\mathrm{P}(T=k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.

2. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega)=[\![0, n]\!]$

   b. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1}=k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que : $\mathbb{P}\left(X_n=0\right)=1-p$

3. **a.** Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in\{1,2, \cdots n+1\}$, $\mathbb{P}\left(X_{n+1}=k\right)=p \mathbb{P}\left(X_n=k-1\right)$

   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in\{0,1,2 \cdots, n-1\}$, $\mathbb{P}\left(X_n=k\right)=p^k(1-p)$.

   En déduire également la valeur de $\mathrm{P}\left(X_n=n\right)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

   c. Vérifier que $\sum\limits_{k=0}^n \mathbb{P}\left(X_n=k\right)=1$.

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p=\frac{1}{3}$.

   On rappelle que `rd.randint(0,3)` renvoie au hasard un entier de $\{0,1,2\}$ (on suppose qu'on a appelé la bibliothèque `numpy.random` avec son alias habituel).

   Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```python
import numpy.random as rd

def simul_X(n):
  x = 0
  for k in range(n) :
    u = rd.randint(0,3)
    if u == 2 :
      x = .......
    else :
      x = .......
  return x
```

5. **a.** Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$d \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1}=\frac{(n-1) p^n-n p^{n-1}+1}{(1-p)^2} .$$

   b. En déduire que $E\left(X_n\right)=\frac{p\left(1-p^n\right)}{1-p}$.

6. **a.** Montrer, en utilisant la question **3.a**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E\left(X_{n+1}^2\right)=p\left(E\left(X_n^2\right)+2 E\left(X_n\right)+1\right)$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = E\left(X_n^2\right) + (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$

c. En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

d. Montrer enfin que : $V\left(X_n\right) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)p^n(1-p)-p^{2n+1}\right)$